LEXIKOGRAFIKUS DÖNTÉSEK
EGY ÁLTALÁNOS DÖNTÉSI MODELLBEN

DOMBI JÓZSEF - VINCZE NÁNDOR

A dolgozatban a lexikografikus döntési eljárást egy olyan általános döntési modell keretébe illesztjük bele, amelynek segítségével modellezhetők a PROMETHEE, ELECTRE, illetve a utility eljárások. Egy lexikografikus döntési függvényt konstruálunk meg, preferenciafüggvény és unáris operátor segítségével.

1. Bevezetés

A döntéselmélet története során nagyon sok eljárást fejlesztettek ki. A kezdeteket Condorcet valamint Cramer és Bernoulli modellje jelentette, ezt követte a döntéselmélet fejlődésének legnagyobb lökést adó Neumann-Morgenstern féle axiomatizált modell, valamint hasznosság-függvény reprezentációk. Ide tartoznak a különböző additív illetve nem-tranzitív modellek, mint a Fishburn féle SSB modell, Fishburn[4], valamint az outranking módszerek, az ELECTRE, a PROMEETHE vagy a Saaty által kidolgozott AHP módszer, Temesi[9],Olson[6]. A gyakorlati alkalmazás során felmerült a kérdés, hogy ezek a modellek megfogalmazhatók-e egy olyan egységes keretrendszerben,amelyben a paraméterek változtatásával megkaphatók az egyes speciális döntési eljárásokat? Ennek jelentősége abban áll, hogy számos döntési szituációban több módszer egymás melletti alkalmazásával határozható meg a kimenetek közötti sorrend. Ezt a keretrendszert adja meg Dombi[1][2].
Dolgozatunk célja a lexikografikus döntés egy olyan numerikus reprezentációjának megadása mellyel beleilleszthető ebbe a keretbe. Ennek tudható be, hogy a dolgozatban látszólag bonyolult reprezentációt adunk a lexikografikus döntésre. Legyen $a = (x_1, x_2, ..., x_n)$ és $b = (y_1, y_2, ..., y_n)$ alternatíva, az x_k, y_k hasznossági értékekkel megadva, és $w_1, w_2, ..., w_n$ súlyok. Adjuk meg a preferenciát a következő módon:

$$p(a, b) = \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i(p_i(x_i, y_i))$$

ahol a preferenciafüggvény

$$p(x, y) = \tfrac{y-x+1}{2}$$

és $\tau_i : [0, 1] \to [0, 1]$ egyváltozós monoton függvény. Dolgozatának első részében Dombi[1] megmutatta, hogy ha $\tau_i(x) = x$ akkor a preferenciák súlyozott átlagát kapjuk, másrészt a súlyozott átlag szerinti döntés felcserélhető a preferenciákon alapuló döntéssel, azaz a utilitás jellegű modellt ez a modell tartalmazza. Továbbá bizonyításra kerül az alábbi:
Tétel: Az ELECTRE és PROMETHEE módszerek p^{EL}, p^{PR} preferenciafüggvényeihez léteznek olyan $\tau_i^E L$ és $\tau_i^P R$ egyváltozós függvények, hogy

$$p^{EL}(a, b) = \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i(p_i(x_i, y_i))$$

$$p^{PR}(a, b) = \sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i(p_i(x_i, y_i))$$

és lineáris esetben például:

$$\tau^{EL}(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad x \leq p_i \\ \frac{x-p_i}{q_i-p_i} & ha \quad p_i < x < q_i \\ 1 & ha \quad q_i \leq x \end{cases}$$

ahol $0 \leq p_i \leq q_i \leq \frac{1}{2}$, és

$$\tau^{PR}(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad x \leq p_i \\ \frac{x-p_i}{q_i-p_i} & ha \quad p_i < x < q_i \\ 1 & ha \quad q_i \leq x \end{cases}$$

ahol $\frac{1}{2} \leq p_i \leq q_i \leq 1$.

Felmerül a kérdés, hogy ebbe a családba beilleszthető-e a lexikografikus döntési eljárás? Jelen dolgozatban megmutatjuk, hogy ha w_i súlyokat illetve $\tau(x)$ függvényt speciálisan választjuk, akkor az általános modell a lexikografikus döntést is magában foglalja. Mivel a lexikografikus döntés nem kompenzatórikus, ezért egy nem folytonos $\tau(x)$ függgvényt kell alkalmazni:

$$\tau(\sum_{i=1}^{n} w_i \tau_i(p_i(x_i, y_i)))$$

Ez azonban nem csorbítja a modell értékét, mert a PROMETHEE és ELECTRE is beilleszthető ebbe az új modellbe, $\tau(x) = x$ alkalmazásával. Ennek azért van jelentősége, mert a konkrét x_i, y_i értékek ismerete nélkül, akármilyen kicsi is lehet a köztük levő eltérés. Ez azt jelenti, hogy eljárásunkat úgy konstruáljuk meg, hogy alkalmazható legyen on-line módon érkező adatok esetében is. Ekkor nem támaszkodhatunk arra, hogy a bejövő adatok között mekkora a legkisebb eltérés, ilymódon előre adott súlyokkal kell dolgoznunk. Ha adataink között tetszőlegesen kis különbség lehet, felmerül a kérdés, hogy alkalmassá tehető-e a modell az indifferenciaküszöb figyelembe vételére? Az említett általános modellben $\tau(x)$ módosításával ez elérhető, például:

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} - \delta \\ \frac{1}{2} & ha \quad \frac{1}{2} - \delta \leq x \leq \frac{1}{2} + \delta \\ 1 & ha \quad \frac{1}{2} + \delta < x \leq 1 \end{cases}$$

A véges lexikografikus rendezés általános koncepciójának alapja - követve Fishburn[3] terminológiáját - egy véges $I = \{1, 2, ..., n\}$ halmaz, és egy $\prec_i$ rendezési reláció a nemüres X_i halmazon minden $i \in I$-re. Jelölje X_i elemeit x_{li}, ahol minden $i \in I$-re $l \in \{1, 2, ..., m\}$. Jelölje $\sim_i$ a $\prec_i$ reláció szimmetrikus komlementerét, azaz bármely $x_{ji} \sim_i x_{ki}$ akkor és csak akkor ha sem $x_{ji} \prec_i x_{ki}$ sem $x_{ki} \prec_i x_{ji}$ reláció nem teljesül. Ekkor $a_j = (x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jn})$ és $a_k = (x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn})$-ra azt mondjuk, hogy a_k lexikografikusan megelőzi a_j-t az I-n értelmezett természetes $<$ rendezés mellett $\prec_i$ relációkra vonatkozóan, vagy jelölésben röviden: $a_j <^L a_k$ akkor és csak akkor ha

$$\{i : i \in I \; és \; (x_{ji} \prec_i x_{ki} vagy \; x_{ki} \prec_i x_{ji})\}$$

halmaz nemüres, és $x_{ji} \prec_i x_{ki}$ az első(legkisebb) i-re ebben a halmazban. Pontosan ezért nevezhetjük a lexikografikus rendezést az első differencia alapján való rendezésnek is. A rendezések lexikografikus aggregációja során fontos a tulajdonságok öröklődésének vizsgálata, Solymosi[8]. Gyenge rendezések illetve lineáris rendezések aggregációja gyenge rendezés illetve lineáris rendezés. Parciális rendezések lexikografikus aggregációja viszont nem feltétlenül parciális rendezés, ciklus is kialakulhat, Fishburn[3].

A lexikografikus rendezésre egyik legismertebb példa az abc szerinti rendezés a szótárakban vagy lexikonokban. A lexikografikus rendezés általános koncepciójának megfelelően ekkor $I = \{1, 2, ..., n\}$ ahol n a leghosszabb, a szótárban leírt szó hossza.

Legyen $X_i = A = \{\emptyset, a, b, ..., z\}$, $\emptyset \prec_i a \prec_i b \prec_i ... \prec_i z$ mellett minden i-re. Egy $\alpha_1\alpha_2...\alpha_r$ szó ahol nyilván $r \leq n$ az A^n halmaz egy $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \emptyset, ..., \emptyset)$ eleme lesz. Ekkor $<^L$az A^n azon részhalmazain amely a "valódi" szavakat jelenti a szavak természetes abc-beli rendezését adja.
A többtényezős csoportos döntések elméletében a lexikografikus döntési eljárás az attribútumok vagy kritériumok egy hierarchiáján, vagy rendezett halmazán alapul, ahol az első különbség alapján való összehasonlítás elve azt mondja ki, hogy egy alternatíva "jobb" mint egy másik, akkor és csak akkor ha az első "jobb" mint a második a legfontosabb kritériumon amelyen különböznek. A bevezetőben említett koncepció szemantikus értelmezéseként legyen tehát a_j és a_k két alternatíva és $c_1, c_2, ..., c_n$ különböző kritériumok, x_{ji} és x_{ki} pedig jelentsék az a_j és a_k alternatívák c_i kritérium szerinti hasznosságát (kiértékelését). Ekkor a_j és a_k alternatívákat azonosíthatjuk a kiértékelés vektoraikkal, azaz mondhatjuk, hogy $a_j = (x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jn})$ és $a_k = (x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn})$.

Ekkor $\prec_i$a c_i kritérium által az alternatívákon megvalósított rendezési reláció. $x_{ji} \sim_i x_{ki}$ akkor és csak akkor, ha a_j és a_k indifferensek c_i kritérium szerint, és $x <^L y$ akkor és csak akkor, ha $x_{ji} \sim_i x_{ki}$ $i \in \{1, 2, ..., l-1\}$ és $x_{jl} \prec_i x_{kl}$.

A lexikografikus döntési szabály számos helyen hatékonyan alkalmazható, pályázatok kiértékelésében, Rapcsák[7], vagy szavazási rendszerekben a holtverseny elkerülésére. Ahogyan fentebb is említettük, dolgozatunkban a preferenciafüggvényt egy súlyozás segítségével valósítjuk meg. Itt a súlyokat úgy választottuk meg, hogy a nem kompenzatórikusság miatt egy kritérium által felállított sorrendet fontossági sorrendben utána következő kritériumok nem változtathatnak meg együttesen sem. Az alternatívahalmazról feltesszük, hogy nem létezik benne két lexikografikusan azonos elem. Vagyis ha tetszőleges A alternatívahalmazon E jelöli azt az ekvivalenciarelációt mely szerint $a_j E a_k$ ha a_j és a_k lexikografikusan azonos, akkor alternatívahalmaznak az A/E faktorhalmazt tekintjük.

2. A lexikografikus döntési függvény konstrukciója

A lexikografikus döntési módszerrel kevés publikáció foglalkozik, numerikus reprezentációjára pedig alig találunk példát. Ezt indokolhatják az erre vonatkozó negatív eredmények, például a sík lexikografikus rendezésére vonatkozó (de tetszőleges n-dimenziós lineáris térre is igaz):
Tétel: Nem létezik olyan folytonos $f(x, y)$ valós függvény, amelyre $(x, y) <^L (v, z) \Longleftrightarrow f(x, y) < f(v, z)$.
Bizonyítás: Legyen x, x_1, x_2, y_1, y_2 olyan, hogy $x_1 < x < x_2$, és $y_1 < y_2$. Tegyük fel, hogy van olyan f(x,y) függvény, amelyre

$$(x, y) <^L (v, z) \Longleftrightarrow f(x, y) < f(v, z).$$

A fentiekre ekkor igaz a következő:

$$(x, y_2) <^L (x_2, y_1) <^L (x_2, y_2) \Longleftrightarrow f(x, y_2) <^L f(x_2, y_1) <^L f(x_2, y_2).$$

Mivel f(x,y) (x_2, y_2) -ben is folytonos, így legyen ε tetszőleges olyan rögzített pozitív érték, hogy $\varepsilon < f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1)$. Ekkor van olyan δ,hogy ha

$$|(x_2, y_2) - (x, y_2)| < \delta \Longrightarrow f(x_2, y_2) - f(x, y_2) < \varepsilon.$$

Azonban legyen x tetszőleges, a definíció szerinti, akkor

$$f(x_2, y_2) - f(x, y_2) > f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1) > \varepsilon$$

ami ellentmondás. így ilyen folytonos függvény nem létezik. ■

2.1. Preferenciafüggvény és módosító függvény

A bevezetésben bemutattuk a lexikografikus döntési elvet. Ebben a fejezetben megkonstruálunk egy lexikografikus döntési függvényt. A konstrukcióhoz általános $p(x, y)$ preferenciafüggvényt és $\tau(x)$ módosító vagy más néven vágófüggvényt, vagy küszöbérték függvényt használunk, melyek a következők:

$$p(x, y) = \tfrac{y-x+1}{2}$$

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & ha \quad x = \frac{1}{2} \\ 1 & ha \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Legyen $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ az alternatívák halmaza, $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ a kritériumok halmaza, fontossági sorrend szerint. Jelölje x_{ij} az a_i alternatíva c_j kritérium szerinti kiértékelését (hasznosságát), és tegyük fel hogy a kiértékelésértékei normáltak, azaz $0 \le x_{ij} \le 1$. Egy döntési helyzetet ezután mátrix alakban, a döntési mátrixszal írhatunk fel,

	c_1	c_2	$\dots$	c_n
a_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	x_{m1}	x_{m2}	$\dots$	x_{mn}

2.1.1. A preferenciafüggvény tulajdonságai

A bevezetőben említettek alapján az alternatívákat azonosíthatjuk a kiértékelés n-esekkel azaz legyen $a_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$ és $a_j = (x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jn})$. Ha a $p(x, y)$ preferenciafüggvényben az $x = x_{ik}$, $y = x_{jk}$ helyettesítéseket elvégezzük, megkapjuk a c_k kritérium által az (a_i, a_j) alternatívák között felállított preferenciasorrendet.

Ekkor

$$\begin{array}{rl} 0 \le p(x_{ik}, x_{jk}) < \frac{1}{2} & ha \quad x_{ik} > x_{jk} \\ p(x_{ik}, x_{jk}) = \frac{1}{2} & ha \quad x_{ik} = x_{jk} \\ \frac{1}{2} < p(x_{ik}, x_{jk}) \le 1 & ha \quad x_{ik} < x_{jk} \end{array}$$

2.1.2. A preferenciafüggvény és a módosító függvény kompozíciója

1. Definíció: Minden (a_i, a_j) párra definiálhatjuk a $p^*(a_i, a_j)$ kritériumonkénti preferencia n-est a következő módon: $p^*(a_i, a_j) = (\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \ldots, \varepsilon_n^{ij}), \varepsilon_k^{ij} = \tau(p(x_{ik}, x_{jk})$, amelyekre teljesül:

$$\tau(p(x_{ik}, x_{jk}) = \begin{cases} 0 & ha \quad x_{ik} > x_{jk} \\ \frac{1}{2} & ha \quad x_{ik} = x_{jk} \\ 1 & ha \quad x_{ik} < x_{jk} \end{cases}$$

Mivel az alternatívahalmazban nem létezik két lexikografikusan azonos elem, így minden (a_i, a_j) párra $a_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ $a_j = (x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn})$ van olyan k_1 és k_2 , hogy $x_{ik_1} < x_{jk_1}$és $x_{jk_2} < x_{ik_2}$.

2.2. A lexikografikus döntési eljárás A dolgozat legfontosabb eredményét az alábbiakban foglalhatjuk össze:

1. Tétel: Legyen $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ az alternatívák halmaza, $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ a kritériumok halmaza, a döntéshozó által megadott fontossági sorrend szerint. Jelölje x_{ij} az a_i alternatíva c_j kritérium szerinti kiértékelését (hasznosságát), és feltesszük, hogy a kiértékelés értékei normáltak, azaz $0 \le x_{ij} \le 1$.
Azaz a döntési mátrix:

	c_1	c_2	$\ldots$	c_n
a_1	x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	x_{m1}	x_{m2}	$\ldots$	x_{mn}

A $p(x, y)$ preferenciafüggvény és $\tau(x)$ módosító vagy küszöbérték függyvény legyen olyan, ahogyan azt 2.1. alatt megadtuk.
Ekkor léteznek olyan w_k $k = 1, 2, ...n$ súlyok hogy az m elemű

$$l_i = \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\tau(\sum_{k=1}^{n} w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))))$$

pozitív valós számhalmazra teljesül:

$$l_i > l_j \text{ pontosan akkor } a_i <^L a_j.$$

A lexikografikus döntési függvény konstrukciójához tehát a bevezetőben említett - a nem kompenzatórikusság elvét megtartó - súlyozás megvalósításával jutunk el. Ezt a következőként valósítjuk meg: Legyen a c_i kritérium fontossági súlya:

$$w_i = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{n2^n}\ .$$

Ellenőrizhető, hogy teljesül a

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$$

feltételt. A lexikografikus döntési függvényt ekkor a következő függvénykompozíció valósítja meg:

$$\tau(\sum_{k=1}^{n} w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))) = \begin{cases} 0 & ha \quad a_i >^L a_j \\ 1 & ha \quad a_i <^L a_j \end{cases}$$

Ennek segítségével definiálható valós számok egy $[0,1]$ -re normált sorozata:

$$l_i = \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\tau(\sum_{k=1}^{n} w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))))$$

melyre

$$l_i > l_j \text{ pontosan akkor } a_i >^L a_j.$$

Ezt a lexikografikus döntési sorrendet reperezentáló sorozatot olymódon konstruáltuk meg, hogy egy adott a_i alternatíva esetén aggregáltuk az a_i alternatíva és minden $j = 1, 2, ..., i-1, i+1, ..., n$-re az a_j alternatíva közötti preferenciát. Ezen a gondolaton alapszik a PROMETHEE módszer globális preferenciakonstrukciója is.

A konstrukció helyességének bizonyításához először a súlyozás helyességét látjuk be.

1. Lemma: Legyen $\varepsilon_k^{ij} = \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))$.Ekkor igaz a következő két állítás:

(1) $\min\limits_{i,j} \sum\limits_{k=1}^{n} w_k \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n2^n} \;\; ha \;\; a_i <^L a_j$,és minimumát $(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \ldots, \varepsilon_n^{ij}) = (1, 0, \ldots, 0)$ helyen veszi fel.
(2) $\max\limits_{i,j} \sum\limits_{k=1}^{n} w_k \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n2^n} \;\; if \;\; a_i >^L a_j$,és maximumát $(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \ldots, \varepsilon_n^{ij}) = (0, 1, \ldots, 1)$ helyen veszi fel.

Az 1. lemma bizonyítása:
(1) Ha $a_i < a_j$ és $\varepsilon_k^{ij} = \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))$ akkor az $(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \ldots, \varepsilon_n^{ij})$ preferencia n-esek közül a következő alakú tartalmaz minimális számú nem 0 elemet:

$$(\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}}_{k}, 1, 0, ...) \text{ for } 0 \leq k < n \text{ .}$$

Ekkor a súlyozott összeg értéke:

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2} + (\frac{k}{2} + 1)\frac{1}{n2^n}$$

ami nyilvánvalóan akkor lesz minimális, ha $k = 0$. Ekkor

$$(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \ldots, \varepsilon_n^{ij}) = (1, 0, \ldots, 0) \text{ és } \min_{i,j} \sum_{k=1}^{n} w_k \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n2^n}.$$

(2) Ha $a_i > a_j$ akkor az $(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \ldots, \varepsilon_n^{ij})$ preferencia n-esek közül a következő alakú tartalmaz maximális nem 0 elemet:

$$(\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}}_{k}, 0, 1, ..., 1) \text{ ahol } 0 \leq k < n$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \varepsilon_k^{ij} = \tfrac{1}{2} - (\tfrac{k}{2}+1)\tfrac{1}{n2^n}$$

Ez a kifejezés maximumát $k = 0$ esetben veszi fel. Ekkor

$$(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \ldots, \varepsilon_n^{ij}) = (0, 1, \ldots, 1) \text{ és } \max_{i,j} \sum_{k=1}^{n} w_k \varepsilon_k^{ij} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n2^n}.$$

Ezzel beláttuk a lemma állítását, így a súlyozás helyességét bizonyítottuk. ■

A tétel bizonyítása: Ekkor a súlyozott összeg értékére igaz:

$$\begin{array}{l} \tfrac{1}{2} < \sum\limits_{k=1}^{n} w_k \varepsilon_k^{ij} \leq 1 \quad ha \quad a_i <^L a_j \\ 0 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} w_k \varepsilon_k^{ij} < \tfrac{1}{2} \quad ha \quad a_i >^L a_j \end{array}$$

Ekkor erre a súlyozott összegre alkalmazva a τ módosító függvényt, kapjuk, hogy

$$\tau(\sum_{k=1}^{n} w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))) = \begin{cases} 0 & ha \quad a_i >^L a_j \\ 1 & ha \quad a_i <^L a_j \end{cases}$$

így $\tau(\sum\limits_{k=1}^{n} w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk})))$ a lexikografikus preferenciarendezést adja két alternatíva között. Ilymódon ezzel a konstrukcióval egy lexikografikus döntési függvényt adtunk meg. Az ebben szereplő $\tau(x)$ küszöbérték függvény nem folytonos, így a lexikografikus döntési függvény sem az. A módosító függvény általános alakja:

$$\tau_{p_i q_i}(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad 0 \leq x < p_i \\ \frac{x-p_i}{q_i-p_i} & ha \quad p_i < x < q_i \\ 1 & ha \quad q_i < x \leq 1 \end{cases}$$

Innen adódik, hogy ha p_i és q_i paraméterek értéke $\frac{1}{2}$-hez tart akkor a lexikografikus döntési eljárást döntési eljárások határértékeként kapjuk meg. Véve

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \tau(\sum_{k=1}^{n} w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk})))$$

összeget azon a_j alternatívák számát adja meg melyek a_i-nél lexikografikusan nagyobbak. [0,1]-re transzformálva ezeket az értékeket kapjuk

$$l_i = \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\tau(\sum_{k=1}^{n} w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))))$$

normált értékeket, melyekre teljesül, hogy $l_i > l_j \Longleftrightarrow a_i < a_j$ azaz a kapott é rtéke-

ken a valósakon értelmezett rendezés szerinti sorrend megegyezik az alternatívákon vett lexikografikus sorrenddel.
Így a tétel állítását beláttuk. ■

3.A lexikografikus döntési függvény tulajdonságai

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a lexikografikus döntési függvényt a legfontosabb és a döntési függvénytől leggyakrabban megkívánt tulajdonságok a döntőség,a neutralitás,a monotonitás,a gyenge és erős Pareto optimalitás tulajdonságok teljesülése szempontjából Hwang,Lin[5].

Ahogyan fentebb írtuk, minden a_i, a_j alternatívapárhoz hozzá tudunk rendelni egy kritériumonkénti preferenciákból előálló preferencia n-est amelyet jelöljön

$$\varepsilon^{ij} = (\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \ldots, \varepsilon_n^{ij}),\ \varepsilon_k^{ij} = \tau(p(x_{ik}, x_{jk})$$

és amelyekre teljesül:

$$\varepsilon_k^{ij} = \begin{cases} 0 & ha \quad x_{ik} > x_{jk} \\ \frac{1}{2} & ha \quad x_{ik} = x_{jk} \\ 1 & ha \quad x_{ik} < x_{jk} \end{cases}$$

így $\varepsilon_k^{ij} \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Legyen most $E = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}^n$ ekkor $\varepsilon^{ij} \in E$.

Jelölje ekkor F az $(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \ldots, \varepsilon_n^{ij}) \longmapsto \tau(\sum\limits_{k=1}^{n} w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk})))$ hozzárendelést. $\tau(\sum\limits_{k=1}^{n} w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk})))$ fentebbi tulajdonságai miatt a lexikografikus döntési függvény felírható ezzel a jelöléssel:

$$F(\varepsilon^{ij}) = \begin{cases} 0 & ha \quad a_i >^L a_j \\ 1 & ha \quad a_i <^L a_j \end{cases}$$

3.1. A lexikografikus döntési függvény fontosabb tulajdonságai

3.1.1.Döntőség:

Egy döntési függvény $F:\ E \rightarrow \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ döntő, ha

$$\varepsilon^{ij} \neq (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2}) \Rightarrow F(\varepsilon^{ij}) \neq \tfrac{1}{2}\ .$$

Gyengén döntő, ha $\left\{\varepsilon^{ij} : F(\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2})\right\} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$.

Szigorúan döntő, ha $\left\{\varepsilon^{ij} : F(\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2})\right\} = \emptyset$.

3.1.2. Neutralitás: Egy döntési függvény neutrális, ha

$$f(1 - \varepsilon_1^{ij}, 1 - \varepsilon_2^{ij}, \ldots, 1 - \varepsilon_n^{ij}) = 1 - f(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \ldots, \varepsilon_n^{ij})$$

azaz ha kritériumonként komplementerére változik két alternatíva között a preferencia, akkor a döntési függvény értéke (vagyis az aggregált preferencia) is komplementerére változik.

3.1.3.Montonitás (pozitív válaszadás)

Egy döntési függvény monoton, ha $\varepsilon^{ij} \geq^L \varepsilon^{kl}$ akkor $F(\varepsilon^{ij}) \geq F(\varepsilon^{kl})$.

3.1.4. Gyenge Pareto optimalitás (az egybehangzó vélemények érvényesülése)

Egy döntési függvény teljesíti a gyenge Pareto optimalitás tulajdonságát, ha bármely (a_i, a_j) alternatívapárra teljesül, hogy ha

$$\forall k \; \varepsilon_k^{ij} = 1 \Longrightarrow F(\varepsilon_k^{ij}) = 1, \text{ vagy ha } \forall k \; \varepsilon_k^{ij} = 0 \Longrightarrow F(\varepsilon_k^{ij}) = 0.$$

3.1.5. Szigorú Pareto optimalitás

Egy döntési függvény teljesíti a szigorú Pareto optimalitás tulajdonságát, ha:

$$\forall k: \; \varepsilon_k^{ij} \in \left\{\tfrac{1}{2}, 1\right\} \text{ és } \exists l: \; \varepsilon_l^{ij} = 1 \;\Rightarrow\; F(\varepsilon^{ij}) = 1$$
$$\text{és ha } \forall k: \; \varepsilon_k^{ij} = \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; F(\varepsilon^{ij}) = \tfrac{1}{2}.$$

2.Lemma: A lexikografikus döntési függvény teljesíti a következő tulajdonságokat:
1.szigorú döntőség
2.neutralitás
3.monotonitás
4.gyenge Pareto optimalitás
5.szigorú Pareto optimalitás.

Bizonyítás:

1. Döntőség: Mivel feltettük, hogy alternatíváink Pareto optimális halmazt alkotnak, így minden a_i, a_j párra van olyan k egész, hogy

$$x_{ik} \neq x_{jk}, \text{ így } \left\{\varepsilon^{ij} : F(\varepsilon^{ij} = \tfrac{1}{2})\right\} = \emptyset,$$

ezért kapjuk, hogy lexikografikus döntési függvény szigorúan döntő.

2. Neutralitás: A lexikografikus döntési függvénynél ez azt jelenti, hogy ha kritériumonként megfordul két alternatíva között a preferenciairány, akkor az két alternatíva közötti prefrencia is ellentettjére fordul. Ez pedig a lexikografikus döntés szabályai miatt belátható hogy igaz. Vagyis a lexikografikus döntési függvény teljesíti a neutralitás feltételeit, ha $\varepsilon_k^{ij} = \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))$-ra:

$$\tau(\textstyle\sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij}) = 1 - \tau(\sum_{k=1}^n w_k (1 - \varepsilon_k^{ij})).$$

Mivel:

$$\textstyle\sum_{k=1}^n w_k (1 - \varepsilon_k^{ij}) = \sum_{k=1}^n w_k - \sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij} = 1 - \sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij}$$

és $\tau(x)$ -re definíciója miatt teljesül a

$$\tau(\alpha) = 1 - \tau(1 - \alpha)$$

függvényegyenlet,így a lexikografikus döntési függvény neutrális.

3. Monotonitás (pozitív válaszadás)

Legyen ε^{ij} az a_i és a_j, ε^{kl} pedig az a_k és a_l alternatívákhoz rendelt kritériumonkénti preferenciák n-ese.
Ha $a_i >^L a_j$ akkor $F(\varepsilon^{ij}) = 1$, így $F(\varepsilon^{ij}) \geq F(\varepsilon^{kl})$ tetszőleges ε^{kl} esetén.
Ha $a_i <^L a_j$ akkor $F(\varepsilon^{ij}) = 0$. Ekkor

$$\varepsilon^{ij} = (\underbrace{\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}}_{k}, 0, ...) \text{ ahol } 0 \leq k < n,$$

így ha $\varepsilon^{ij} \geq^L \varepsilon^{kl}$ akkor ε^{kl} olyan, hogy ha egy kritérium szerinti preferencia értéke ε^{ij}-ben $\frac{1}{2}$ akkor ugyanezen kritérium szerint ε^{kl}-ben 0 van, vagy pedig

$$\varepsilon^{kl} = (\underbrace{\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}}_{k}, 0, ...) \text{ ahol } 0 \leq k < n.$$

Ekkor mindkét esetben $F(\varepsilon^{kl}) = 0$, így a monotonitás teljesül.

4. Gyenge Pareto optimalitás

Mivel a módosító függvényre definíciója miatt teljesül, hogy

$$\tau(\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot 1) = \tau(\sum_{k=1}^{n} w_k) = \tau(1) = 1\,,$$

így a gyenge Pareto optimalitás feltétel második fele teljesül a lexikografikus döntési függvényre, azaz

$$\tau(\sum_{k=1}^{n} w_k \cdot \tfrac{1}{2}) = \tau(\tfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} w_k) = \tau(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2},$$

azonban dolgozatunkban feltettük, hogy az alternatívák között nincs két lexikografikusan azonos, emiatt így a gyenge Pareto optimalitás teljesül.

5. Szigorú Pareto optimalitás A szigorú Pareto otpimalitás feltétele teljesül, ha

$$\forall k: \ \varepsilon_k^{ij} \in \left\{\tfrac{1}{2}, 1\right\} \text{ és } \exists l: \varepsilon_l^{ij} = 1 \Rightarrow F(\varepsilon^{ij}) = 1.$$

A feltétel második felére ugyanaz igaz amit az előbbi pontban megfogalmaztunk azaz ha $\forall k: \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2}$ akkor $F(\varepsilon^{ij}) = \frac{1}{2}$ valóban teljesül, ebben a dolgozatban viszont lexikografikus azonosságot az alternatívák között kizártuk, így $\forall k: \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2}$ nem fordulhat elő. így a lexikografikus döntési függvény szigorúan Pareto optimális.

Így a lemma állítását bizonyítottuk. ■

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozunk dolgozatunk lektorának, aki értékes észrevételeivel lehetővé tette, a közölt döntési eljárás gondolatmenetének pontos kifejtését, rámutatva a modell lényeges és részletesebb kifejtést igénylő elemeire, mint amilyen például az adatok folytonossága, vagy az általános keretrendszerben a paraméterek választásának kérdése.

Irodalom

1. Dombi J. A general framework for the utility based outranking methods, Fuzzy Logic and Soft Computing, Advances in fuzzy systems - applications and theory, Ed. B. Bouchon-Meunier,R.R.Yager, R.A. Zadeh 1995

2. Dombi J. A Common Preference Model for Various Decision Models, Principles of Fuzzy Preference Modeling and Decision Making (eds. B. De Baets, J. Fodor), 2004

3. Fishburn P.C. Lexicographic orders, utilities and decision rules: a survey, Management Science 11 (1974) 1442-1471

4. Fishburn P.C. Nonlinear preference and utility theory, Wheatsheaf Books Ltd., Brighton, 1988.

5. Hwang CL, Lin MJ. Group Decision Making under Multiple Criteria, Springer Verlag: Berlin Heidelberg, 1987.

6. Olson D.L. Decision Aids for Selection Problems, Springer Verlag: New York,1996.

7. Rapcsák T. Többszempontú döntési problémák, MTA SZTAKI, 2003.

8. Solymosi T., Ordinális mérési skálák lexikografikus aggregációja, Adat, modell elemzés, Kovács E.(szerk.), Aula, Budapest 2001. 119-126.

9. Temesi J. A döntéselmélet alapjai, Aula, 2002.