

A LEXIKOGRAFIKUS DÖNTÉS KAPCSOLATA A HAGYOMÁNYOS DÖNTÉSI ELJÁRÁSOKKAL

DOMBI JÓZSEF -VINCZE NÁNDOR

A dolgozatban a lexikografikus döntési eljárásra adunk egy új formális kiszámítási módszert. Egy lexikografikus döntési függvényt konstruálunk meg, preferencia függvény és unáris operátor segítségével. A konstrukcióval beilleszthetővé válik a lexikografikus döntési eljárás a különböző outranking megközelítések, illetve a utility alapú döntési modellek közé.

1. Bevezetés

A véges lexikografikus rendezés általános koncepciójának alapja egy véges $I = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz, és egy \prec_i rendezési reláció and a nemüres X_i halmazon minden $i \in I$ -re. Jelölje X_i elemeit x_{li} , ahol minden $i \in I$ -re $l \in \{1, 2, \dots, m\}$. Jelölje \sim_i a \prec_i reláció szimmetrikus komplementerét, azaz bármely $x_{ji} \sim_i x_{ki}$ akkor és csak akkor ha sem $x_{ji} \prec_i x_{ki}$ sem $x_{ki} \prec_i x_{ji}$ reláció nem teljesül. Ekkor $a_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn})$ és $a_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ -ra azt mondjuk, hogy a_k lexikografikusan megelőzi a_j -t az I -n értelmezett természetes $<$ rendezés mellett \prec_i relációkra vonatkozóan, vagy jelölésben röviden: $a_j <^L a_k$ akkor és csak akkor ha

$$\{i : i \in I \text{ és } (x_{ji} \prec_i x_{ki} \text{ vagy } x_{ki} \prec_i x_{ji})\}$$

halmaz nemüres, és $x_{ji} \prec_i x_{ki}$ az első (legkisebb) i -re ebben a halmazban. Pontosán ezért nevezhetjük a lexikografikus rendezést $<^L$ -t az első differencia alapján való rendezésnek is.

A lexikografikus rendezésre egyik legismertebb példa az abc szerinti rendezés a szótárakban vagy lexikonokban. Legyen ekkor $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ahol n a leghosszabb, a szótárban leírt szó hossza. Legyen $X_i = A = \{\emptyset, a, b, \dots, z\}$, $\emptyset \prec_i a \prec_i b \prec_i \dots \prec_i z$ mellett minden i -re. Egy $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r$ szó ahol nyilván $r \leq n$ az A^n halmaz egy $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \emptyset, \dots, \emptyset)$ eleme lesz. Ekkor $<^L$ az A^n azon részhalmazain amely a "valódi" szavakat jelenti a szavak természetes abc-beli rendezését adja. Például, az "ás" megelőzi az "ász" szót, mivel $(\acute{a}, s, \emptyset, \dots, \emptyset) <^L (\acute{a}, s, z, \emptyset, \dots, \emptyset)$ amiatt, hogy $a \sim_1 a$, $s \sim_2 s$, $\emptyset \prec_3 k$.

A többtényezős csoportos döntések elméletében a lexikografikus döntési eljárás az

attribútumok vagy kritériumok egy hierarchiáján, vagy rendezett halmazán alapul. A döntési alternatívákat először az első, vagy legfontosabb kritérium szerint vizsgáljuk. Ha több mint egy alternatíva "legjobb" vagy "kielégítő" ezen a kritériumon akkor összehasonlítjuk őket a második kritérium alapján, és így tovább. Az első különbség alapján való összehasonlítás elve azt mondja ki, hogy egy alternatíva "jobb" mint egy másik, akkor és csak akkor ha az első "jobb" mint a második a legfontosabb kritériumon amelyen különböznek. A bevezetőben említett koncepció szemantikus értelmezéseként legyen tehát a_j és a_k két alternatíva és c_1, c_2, \dots, c_n különböző kritériumok, x_{ji} és x_{ki} pedig jelentsék az a_j és a_k alternatívák c_i kritérium szerinti hasznosságát (kiértékelését). Ekkor a_j és a_k alternatívákat azonosíthatjuk a kiértékelés vektoraikkal, azaz mondhatjuk, hogy $a_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn})$ és $a_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$.

Ekkor \prec_i a c_i kritérium által az alternatívákon megvalósított rendezési reláció. $x_{ji} \sim_i x_{ki}$ akkor és csak akkor, ha a_j és a_k indifferensek c_i kritérium szerint, és $x \prec^L y$ akkor és csak akkor, ha $x_{ji} \sim_i x_{ki} \ i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$ és $x_{jl} \prec_i x_{kl}$.

A lexikografikus döntési szabály szavazási rendszerekben is használatos, és több szavazási módszer is használja a szavazási holtverseny elkerülésére. A lexikografikus döntési eljárásnak a szekvenciális kiostálási (szűrési) eljárás egy másik általános, gyakran használt alkalmazása. A jelölteket - vagy alternatívákat - először adott kritériumok alapján pl. teszt vagy interjú alapján szűrik meg, és osztályozzák őket "elutasított" illetve "egyéb" kategóriákra. A c_1 kritérium szerinti rendezésben $a_j \sim_1 a_k$ ha a_j és a_k egyszerre esik az "elutasított" illetve "egyéb" kategóriába, ha $a_j \prec_1 a_k$ esetén a_j "elutasított" vagy a_k "egyéb".

Az "egyéb" kategóriába eső alternatívákat tovább szűrjük a második kritérium vagy teszt alapján és újra két kategóriába soroljuk őket. Az első kritérium szerint "elutasított" kategóriába eső alternatívák természetesen nem vizsgálhatók tovább a második kritérium szerint. Ez az eljárás folytatható addig míg az utolsó szűrőn túljutó alternatívákat meg nem találtuk.

Az alternatívák kiértékelésekor a kritériumok jellemezhetik őket a valós számok folytonos numerikus értékeivel, vagy kategóriákkal, amit numerikus jellemzéssé konvertálva diszkrét numerikus értékelést kapunk.

A kategóriákkal való jellemzés esetén a legtermészetesebb módon alkalmazható a döntésben a lexikografikus módszer, folytonos numerikus értékek esetén azonban a nem kompenzatorikusság megvalósíthatósága miatt kérdéses, hogyan alkalmazható ebben az esetben a lexikografikus döntési módszer.

Ebben dolgozatban ezt valósítjuk meg egy lexikografikus döntési függvény megkonstruálásával, amit Dombi eredményei alapján egy általános preferenciafüggvény segítségével modellezünk, lehetőséget adva így a lexikografikus módszernek a PROMETHEE, ELECTRE és Utility módszerek közé való beillesztéséhez. Ez azért fontos, mivel egy összetett többtényezős döntési probléma esetén nem biztos, hogy egyetlen módszerrel lehet a problémát megoldani. A különböző kritérium csoportok más-más aggregálási módszert követelhetnek meg. Ezért célszerű lehet egy olyan egységes formalizmus létrehozása, amiben az eljárás paramétereinek változtatásával a különböző döntéstámogató módszerek megkaphatók. A preferenciafüggvényt egy súlyozás segítségével valósítjuk meg. Itt a súlyokat úgy választottuk meg, hogy a nem kompenzatorikusság miatt egy kritérium által felállított sorrendet fontossági sorrendben utána következő kritériumok nem változtathatnak meg együttesen sem. Dolgozatunkban az alternatívahalmazról feltesszük, hogy nem létezik benne két lexikografikusan azonos elem. Vagyis ha tetszőleges A alternatívahalmazon E jelöli azt az ekvivalenciarelációt mely szerint $a_j E a_k$ ha a_j és a_k lexikografikusan azonos, akkor alternatívahalmaznak az A/E faktorhalmazt tekintjük.

2. A lexikografikus döntési függvény konstrukciója

A lexikografikus döntési módszerrel kevés publikáció foglalkozik, numerikus reprezentációjára pedig alig találunk példát. Ezt indokolhatják az erre vonatkozó negatív eredmények, például a sík lexikografikus rendezésére vonatkozó (de tetszőleges n-dimenziós lineáris térre is igaz):

Tétel: Nem létezik olyan folytonos $f(x, y)$ valós függvény, amelyre $(x, y) \prec^L (v, z) \iff f(x, y) < f(v, z)$.

Bizonyítás: Legyen x, x_1, x_2, y_1, y_2 olyan, hogy $x_1 < x < x_2$, és $y_1 < y_2$. Tegyük fel, hogy van olyan $f(x, y)$ függvény, amelyre

$$(x, y) \prec^L (v, z) \iff f(x, y) < f(v, z).$$

A fentiekre ekkor igaz a következő:

$$(x, y_2) <^L (x_2, y_1) <^L (x_2, y_2) \iff f(x, y_2) <^L f(x_2, y_1) <^L f(x_2, y_2).$$

Mivel $f(x, y)$ (x_2, y_2) -ben is folytonos, így legyen ε tetszőleges olyan rögzített pozitív érték, hogy $\varepsilon < f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1)$. Ekkor van olyan δ , hogy ha

$$|(x_2, y_2) - (x, y_2)| < \delta \implies f(x_2, y_2) - f(x, y_2) < \varepsilon.$$

Azonban legyen x tetszőleges, a definíció szerinti, akkor

$$f(x_2, y_2) - f(x, y_2) > f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1) > \varepsilon$$

ami ellentmondás. így ilyen folytonos függvény nem létezik.

2.1. A preferenciafüggvény és a módosító függvény

A bevezetésben bemutatottuk a lexikografikus döntési elvet. Ebben a fejezetben megkonstruálunk egy lexikografikus döntési függvényt. A konstrukcióhoz általános $p(x, y)$ preferenciafüggvényt és $\tau(x)$ módosító vagy más néven vágófüggvényt, vagy küszöbérték függvényt használunk, melyek a következők:

$$p(x, y) = \frac{x-y+1}{2}$$

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{if } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ az alternatívák halmaza, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ a kritériumok halmaza, fontossági sorrend szerint. Jelölje x_{ij} az a_i alternatíva c_j kritérium szerinti kiértékelését (hasznosságát), és tegyük fel hogy a kiértékelésértékei normáltak, azaz $0 \leq x_{ij} \leq 1$. Egy döntési helyzetet ezután mátrix alakban, a döntési mátrixszal írhatunk fel,

	c_1	c_2	\dots	c_n
a_1	x_{11}	x_{12}	\dots	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	\dots	x_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
a_m	x_{m1}	x_{m2}	\dots	x_{mn}

2.1.1. A preferenciafüggvény tulajdonságai

A bevezetőben említettek alapján az alternatívákat azonosíthatjuk a kiértékelés n -eseikkel azaz legyen $a_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ és $a_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn})$. Az (a_i, a_j) alternatívák c_k kritérium szerinti kiértékelésének preferenciasorrendjét megkapjuk ha a $p(x, y)$ preferenciafüggvényben az $x = x_{ik}$, $y = x_{jk}$ helyettesítéseket elvégezzük.

Ekkor

$$\begin{aligned} 0 \leq p(x_{ik}, x_{jk}) < \frac{1}{2} & \text{ ha } x_{ik} < x_{jk} \\ p(x_{ik}, x_{jk}) = \frac{1}{2} & \text{ ha } x_{ik} = x_{jk} \\ \frac{1}{2} < p(x_{ik}, x_{jk}) \leq 1 & \text{ ha } x_{ik} > x_{jk} \end{aligned}$$

2.1.2. A preferenciafüggvény és a módosító függvény kompozíciója

1. Definíció: Minden (a_i, a_j) párra definiálhatjuk a $p^*(a_i, a_j)$ kritériumonkénti preferencia n -est a következő módon: $p^*(a_i, a_j) = (\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \dots, \varepsilon_n^{ij})$, $\varepsilon_k^{ij} = \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))$, amelyekre teljesül:

$$\tau(p(x_{ik}, x_{jk})) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_{ik} < x_{jk} \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_{ik} = x_{jk} \\ 1 & \text{if } x_{ik} > x_{jk} \end{cases}$$

Mivel az alternatívahalmazban nem létezik két lexikografikusan azonos elem, így minden (a_i, a_j) párra $a_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ $a_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn})$ van olyan k_1 és k_2 , hogy $x_{ik_1} < x_{jk_1}$ és $x_{jk_2} < x_{ik_2}$.

2.2. A lexikografikus döntési eljárás A dolgozat legfontosabb eredményét az alábbiakban foglalhatjuk össze:

1. Tétel: Legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ az alternatívák halmaza, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ a kritériumok halmaza, a döntéshozó által megadott fontossági sorrend szerint. Jelölje x_{ij} az a_i alternatíva c_j kritérium szerinti kiértékelését (hasznosságát), és felteesszük, hogy a kiértékelés értékei normáltak, azaz $0 \leq x_{ij} \leq 1$.

Azaz a döntési mátrix:

	c_1	c_2	\dots	c_n
a_1	x_{11}	x_{12}	\dots	x_{1n}
a_2	x_{21}	x_{22}	\dots	x_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
a_m	x_{m1}	x_{m2}	\dots	x_{mn}

A $p(x, y)$ preferenciafüggvény és $\tau(x)$ módosító vagy küszöbérték függvény legyen olyan, ahogyan azt 2.1. alatt megadtuk.

Ekkor léteznek olyan w_k $k = 1, 2, \dots, n$ súlyok hogy az m elemű

$$l_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (1 - \tau(\sum_{k=1}^n w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))))$$

pozitív valós számhalmazra teljesül:

$$l_i > l_j \text{ pontosan akkor } a_i >^L a_j.$$

A lexikografikus döntési függvény konstrukciójához tehát a bevezetőben említett - a nem kompenzatórikusság elvét megtartó - súlyozás megvalósításával jutunk el. Ezt a következőként valósítjuk meg: Legyen a c_i kritérium fontossági súlya:

$$w_i = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{n2^n}.$$

Ellenőrizhető, hogy teljesül a

$$\sum_{k=1}^n w_k = 1$$

feltételt. A lexikografikus döntési függvényt ekkor a következő függvénykompozíció valósítja meg:

$$\tau\left(\sum_{k=1}^n w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } a_i <^L a_j \\ 1 & \text{if } a_i >^L a_j \end{cases}$$

Ennek segítségével definiálható valós számok egy $[0, 1]$ -re normált sorozata:

$$l_i = \frac{s_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (1 - \tau(\sum_{k=1}^n w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))))$$

melyre

$$l_i > l_j \text{ pontosan akkor } a_i >^L a_j.$$

Ezt a lexikografikus döntési sorrendet reprezentáló sorozatot oly módon konstruáltuk meg, hogy egy adott a_i alternatíva esetén aggregáltuk az a_i alternatíva és minden $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ -re az a_j alternatíva közötti preferenciát. Ezen a gondolon alapszik a PROMETHEE módszer globális preferenciakonstrukciója is.

A konstrukció helyességének bizonyításához először a súlyozás helyességét látjuk be.

1. Lemma: Legyen $\varepsilon_k^{ij} = \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))$. Ekkor igaz a következő két állítás:

(1) $\min_{i,j} \sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n2^n}$ ha $a_i >^L a_j$, és minimumát $(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \dots, \varepsilon_n^{ij}) = (1, 0, \dots, 0)$ helyen veszi fel.

(2) $\max_{i,j} \sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n2^n}$ if $a_i <^L a_j$, és maximumát $(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \dots, \varepsilon_n^{ij}) = (0, 1, \dots, 1)$ helyen veszi fel.

Az 1. lemma bizonyítása:

(1) Ha $a_i > a_j$ és $\varepsilon_k^{ij} = \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))$ akkor az $(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \dots, \varepsilon_n^{ij})$ preferencia n -esek közül a következő alakú tartalmaz minimális számú nem 0 elemet:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)}_k, 1, 0, \dots \text{ for } 0 \leq k < n.$$

Ekkor a súlyozott összeg értéke:

$$\sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2} + \left(\frac{k}{2} + 1\right) \frac{1}{n2^n}$$

ami nyilvánvalóan akkor lesz minimális, ha $k = 0$. Ekkor

$$(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \dots, \varepsilon_n^{ij}) = (1, 0, \dots, 0) \text{ és } \min_{i,j} \sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n2^n}.$$

(2) Ha $a_i < a_j$ akkor az $(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \dots, \varepsilon_n^{ij})$ preferencia n -esek közül a következő alakú tartalmaz maximális nem 0 elemet:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)}_k, 0, 1, \dots, 1 \text{ ahol } 0 \leq k < n$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2} - \left(\frac{k}{2} + 1\right) \frac{1}{n2^n}$$

Ez a kifejezés maximumát $k = 0$ esetben veszi fel. Ekkor

$$(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \dots, \varepsilon_n^{ij}) = (0, 1, \dots, 1) \text{ és } \max_{i,j} \sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n2^n}.$$

Ezzel beláttuk a lemma állítását, így a súlyozás helyességét bizonyítottuk.

A tétel bizonyítása: Ekkor a súlyozott összeg értékére igaz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij} \leq 1 & \quad \text{ha } a_i >^L a_j \\ 0 \leq \sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij} < \frac{1}{2} & \quad \text{ha } a_i <^L a_j \end{aligned}$$

Ekkor erre a súlyozott összegre alkalmazva a τ módosító függvényt, kapjuk, hogy

$$\tau\left(\sum_{k=1}^n w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } a_i <^L a_j \\ 1 & \text{if } a_i >^L a_j \end{cases}$$

így $\tau\left(\sum_{k=1}^n w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))\right)$ a lexikografikus preferenciarendezést adja két alternatíva között. Ilymódon ezzel a konstrukcióval egy lexikografikus döntési függvényt adtunk meg. Az ebben szereplő $\tau(x)$ küszöbérték függvény nem folytonos, így a lexikografikus döntési függvény sem az. A módosító függvény általános alakja Dombi(1995):

$$\tau_{p_1 p_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq x < p_1 \\ \frac{x-p_1}{p_2-p_1} & \text{if } p_1 < x < p_2 \\ 1 & \text{if } p_2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Innen adódik, hogy ha p_1 és p_2 határértékét vesszük, ahol mindkét paraméter értéke $\frac{1}{2}$ -hez tart akkor a lexikografikus döntési eljárást mint más döntési eljárások határértékét kapjuk meg. Véve

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \tau\left(\sum_{k=1}^n w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))\right)$$

összeget azon a_j alternatívák számát adja meg melyeknél a_i lexikografikusan nagyobb. Ekkor a következő átalakítás:

$$s_i = n - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \tau\left(\sum_{k=1}^n w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))\right)$$

megadja hogy az a_i hányadik elem lesz az alternatívák lexikografikus rendezésben. $[0,1]$ -re transzformálva ezeket az értékeket kapjuk

$$l_i = \frac{s_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (1 - \tau\left(\sum_{k=1}^n w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))\right))$$

normált értékeket, melyekre teljesül, hogy $l_i > l_j \iff a_i > a_j$ azaz a kapott értéke-

ken a valósakon értelmezett rendezés szerinti sorrend megegyezik az alternatívákön vett lexikografikus sorrenddel.

Így a tétel állítását beláttuk.

3.A lexikografikus döntési függvény tulajdonságai

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a lexikografikus döntési függvényt a legfontosabb és a döntési függvénytől leggyakrabban megkívánt tulajdonságok a döntőség, a neutralitás, a monotonitás, a gyenge és erős Pareto optimalitás tulajdonságok teljesülése szempontjából.

Ahogy fentebb írtuk, minden a_i, a_j alternatívapárhoz hozzá tudunk rendelni egy kritériumonkénti preferenciákból előálló preferencia n -est amelyet jelöljön

$$\varepsilon^{ij} = (\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \dots, \varepsilon_n^{ij}), \varepsilon_k^{ij} = \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))$$

és amelyekre teljesül:

$$\varepsilon_k^{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } x_{ik} < x_{jk} \\ \frac{1}{2} & \text{if } x_{ik} = x_{jk} \\ 1 & \text{if } x_{ik} > x_{jk} \end{cases}$$

így $\varepsilon_k^{ij} \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Legyen most $E = \{0, \frac{1}{2}, 1\}^n$ ekkor $\varepsilon^{ij} \in E$.

Jelölje ekkor F az $(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \dots, \varepsilon_n^{ij}) \mapsto \tau(\sum_{k=1}^n w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk})))$ hozzárendelést.

$\tau(\sum_{k=1}^n w_k \tau(p(x_{ik}, x_{jk})))$ fentebbi tulajdonságai miatt a lexikografikus döntési függvény felírható ezzel a jelöléssel:

$$F(\varepsilon^{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{if } a_i <^L a_j \\ 1 & \text{if } a_i >^L a_j \end{cases}$$

3.1. A lexikografikus döntési függvény fontosabb tulajdonságai

3.1.1. Döntőség:

Egy döntési függvény $F : E \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ döntő, ha

$$\varepsilon^{ij} \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \Rightarrow F(\varepsilon^{ij}) \neq \frac{1}{2}.$$

Gyengén döntő, ha $\{\varepsilon^{ij} : F(\varepsilon^{ij}) = \frac{1}{2}\} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$.

Szigorúan döntő, ha $\{\varepsilon^{ij} : F(\varepsilon^{ij}) = \frac{1}{2}\} = \emptyset$.

3.1.2. Neutralitás: Egy döntési függvény neutrális, ha

$$f(1 - \varepsilon_1^{ij}, 1 - \varepsilon_2^{ij}, \dots, 1 - \varepsilon_n^{ij}) = 1 - f(\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij}, \dots, \varepsilon_n^{ij})$$

azaz ha kritériumonként komplementerére változik két alternatíva között a preferencia, akkor a döntési függvény értéke (vagyis az aggregált preferencia) is komplementerére változik.

3.1.3. Monotonitás (pozitív válaszadás)

Egy döntési függvény monoton, ha $\varepsilon^{ij} \geq^L \varepsilon^{kl}$ akkor $F(\varepsilon^{ij}) \geq F(\varepsilon^{kl})$.

3.1.4. Gyenge Pareto optimalitás (az egybehangzó vélemények érvényesülése)

Egy döntési függvény teljesíti a gyenge Pareto optimalitás tulajdonságát, ha bármely (a_i, a_j) alternatívapárra teljesül, hogy ha

$$\forall k \varepsilon_k^{ij} = 1 \implies F(\varepsilon_k^{ij}) = 1, \text{ vagy ha } \forall k \varepsilon_k^{ij} = 0 \implies F(\varepsilon_k^{ij}) = 0.$$

3.1.5. Szigorú Pareto optimalitás

Egy döntési függvény teljesíti a szigorú Pareto optimalitás tulajdonságát, ha:

$$\begin{aligned} \forall k : \varepsilon_k^{ij} \in \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\} \text{ and } \exists l : \varepsilon_l^{ij} = 1 \implies F(\varepsilon^{ij}) = 1 \\ \text{és ha } \forall k : \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2} \implies F(\varepsilon^{ij}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.Lemma: A lexikografikus döntési függvény teljesíti a következő tulajdonságokat:

- 1.szigorú döntőség
- 2.neutralitás
- 3.monotonitás
- 4.gyenge Pareto optimalitás
- 5.szigorú Pareto optimalitás.

Bizonyítás:

1. Döntőség: Mivel feltettük, hogy alternatíváink Pareto optimális halmazt alkotnak, így minden a_i, a_j párra van olyan k egész, hogy

$$x_{ik} \neq x_{jk}, \text{ így } \{ \varepsilon^{ij} : F(\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}) \} = \emptyset,$$

ezért kapjuk, hogy lexikografikus döntési függvény szigorúan döntő.

2. Neutralitás: A lexikografikus döntési függvénynél ez azt jelenti, hogy ha kritériumonként megfordul két alternatíva között a preferenciairány, akkor az két alternatíva közötti preferencia is ellentettjére fordul. Ez pedig a lexikografikus döntés szabályai miatt belátható hogy igaz. Vagyis a lexikografikus döntési függvény teljesíti a neutralitás feltételeit, ha $\varepsilon_k^{ij} = \tau(p(x_{ik}, x_{jk}))$ -ra:

$$\tau\left(\sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij}\right) = 1 - \tau\left(\sum_{k=1}^n w_k (1 - \varepsilon_k^{ij})\right).$$

Mivel:

$$\sum_{k=1}^n w_k (1 - \varepsilon_k^{ij}) = \sum_{k=1}^n w_k - \sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij} = 1 - \sum_{k=1}^n w_k \varepsilon_k^{ij}$$

és $\tau(x)$ -re definíciója miatt teljesül a

$$\tau(\alpha) = 1 - \tau(1 - \alpha)$$

függvényegyenlet, így a lexikografikus döntési függvény neutrális.

3. Monotonitás (pozitív válaszadás)

Legyen ε^{ij} az a_i és a_j , ε^{kl} pedig az a_k és a_l alternatívákhoz rendelt kritériumonkénti preferenciák n -ese.

Ha $a_i >^L a_j$ akkor $F(\varepsilon^{ij}) = 1$, így $F(\varepsilon^{ij}) \geq F(\varepsilon^{kl})$ tetszőleges ε^{kl} esetén.

Ha $a_i <^L a_j$ akkor $F(\varepsilon^{ij}) = 0$. Ekkor

$$\varepsilon^{ij} = \left(\underbrace{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_k, 0, \dots \right) \text{ ahol } 0 \leq k < n,$$

így ha $\varepsilon^{ij} \geq^L \varepsilon^{kl}$ akkor ε^{kl} olyan, hogy ha egy kritérium szerinti preferencia értéke ε^{ij} -ben $\frac{1}{2}$ akkor ugyanezen kritérium szerint ε^{kl} -ben 0 van, vagy pedig

$$\varepsilon^{kl} = (\underbrace{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_k, 0, \dots) \text{ ahol } 0 \leq k < n.$$

Ekkor mindkét esetben $F(\varepsilon^{kl}) = 0$, így a monotonitás teljesül.

4. Gyenge Pareto optimalitás

Mivel a módosító függvényre definíciója miatt teljesül, hogy

$$\tau(\sum_{k=1}^n w_k \cdot 1) = \tau(\sum_{k=1}^n w_k) = \tau(1) = 1,$$

így a gyenge Pareto optimalitás feltétel második fele teljesül a lexikografikus döntési függvényre, azaz

$$\tau(\sum_{k=1}^n w_k \cdot \frac{1}{2}) = \tau(\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n w_k) = \tau(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2},$$

azonban dolgozatunkban feltettük, hogy az alternatívák Pareto optimálisak, így nem lehet közöttük két lexikografikusan azonos. emiatt így a gyenge Pareto optimalitás teljesül.

5. Szigorú Pareto optimalitás A szigorú Pareto optimalitás feltétele teljesül, ha

$$\forall k : \varepsilon_k^{ij} \in \{\frac{1}{2}, 1\} \text{ és } \exists l : \varepsilon_l^{ij} = 1 \Rightarrow F(\varepsilon^{ij}) = 1.$$

A feltétel második felére ugyanaz igaz amit az előbbi pontban megfogalmaztunk azaz ha $\forall k : \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2}$ akkor $F(\varepsilon^{ij}) = \frac{1}{2}$ valóban teljesül, ebben a dolgozatban viszont Pareto optimális alternatívahalmazt teszünk fel így $\forall k : \varepsilon_k^{ij} = \frac{1}{2}$ nem fordulhat elő. így a lexikografikus döntési függvény szigorúan Pareto optimális. Így a lemma állítását bizonyítottuk.

Irodalom

1. Dombi J. A general framework for the utility based outranking methods, Fuzzy Logic and Soft Computing, Advances in fuzzy systems - applications and theory, Ed. B. Bouchon-Meunier, R.R. Yager, R.A. Zadeh 1995
2. Fishburn P.C. Lexicographic orders, utilities and decision rules: a survey, Management Science 11 (1974) 1442-1471
3. Fishburn P.C. Noncompensatory preferences, Synthese 33 (1976), 393-403.
4. Fishburn P.C. The foundations of expected utility, D. Reidel Publishing Company, 1982.
5. Hwang CL, Lin MJ. Group Decision Making under Multiple Criteria, Springer Verlag: Berlin Heidelberg, 1987.
6. Hwang CL, Lin MJ. Fuzzy Multiple Attribute Decision Making, Springer Verlag: Berlin Heidelberg.
7. Olson D.L. Decision Aids for Selection Problems, Springer Verlag: New York, 1996.
8. Frisch A., Hnich B., Kiziltan Z., Miguel I., Walsh T. Global Constraints for Lexicographic Orderings P. Van Heytenryck (Ed.): CP, LNCS 2470, (2002), 93-102.
9. Fishburn P.C. The foundations of expected utility D. Reidel Publishing Company, 1982.
10. Fortemps P. Pirlot M. Conjoint axiomatization of Min, DiscriMin and LexiMin

11. Bouyssou D. Some remarks on the notion of compensation in MCDM European Journal of Operation Research 26 (1986) 150-160.
12. Thierry M. Towards a theory of MCDM , Stepping away from social choice theory, 2002.
13. Fishburn P.C. Lexicographic additive differences Journal of Mathematical Psychology 21 (1980) 191-218.
14. Luce R.D. Lexicographic tradeoff structures, Theory and Decision 9 (1978) 187-193.
15. Behringer F.A. Lexmaxmin in fuzzy multiobjective decision making Optimization 21 (1990) 23-49.